

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ИМ. Л. В. КИРЕГСКОГО

Препринт № 467Ф

РЕСТАВРАЦИЯ СИГНАЛОВ И СЕРЬЕЗАРЕШЕНИЕ

В. А. Кравцов, Р. Ф. Миненкова

Красноярск - 1988

Рассмотрены основные алгоритмы реставрации сигналов, т.е. методы алгоритмической компенсации искажений, вносимых в сигнал в процессе его измерения. Обсуждаются прикладные аспекты нового метода аналитического продолжения спектра, определяются сферы его применимости и приводятся результаты моделирования сверхразрешения на ЭМ.

Для специалистов по цифровой обработке сигналов.

© Институт Физики СО АН СССР, Красноярск

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена реставрации сигнала — классической проблеме, поставленной Релеем свыше ста лет тому назад. Повышенный интерес к ней сегодня объясняется, по-видимому, неограниченными возможностями устройств в технику эксперимента и созданием ряда новых перспективных теоретических направлений (см. [1-4]).

Измеряемый сигнал взаимодействует с физическим прибором (без такого взаимодействия измерения вообще невозможно) и, как следствие, искажается. Задача состоит в восстановлении исходного сигнала на входе прибора по искаженному выходному сигналу и характеристикам прибора. Речь, таким образом, идет о последующей обработке выходного сигнала, которая повышает качество измерения.

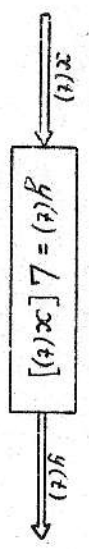
В пересей части мы даем строгую постановку проблемы реставрации в частном случае линейного прибора. Здесь изложены общие схемы обработки, получены некоторые полезные соотношения и основные идеи продвинутого в вычислительном эксперименте. Вторая часть основана на недавно полученных теоретических результатах Л.А.Изенберга [5, 6]. Мы обсуждаем прикладные аспекты предложенной им формулы аналитического продолжения и показываем конструктивность этого подхода к проблеме реставрации.

Изложение рассчитано на научных работников и инженеров, интересующихся вопросами цифровой обработки сигналов.

ЧАСТЬ I

1. Основное уравнение. Обозначим через $x(t)$ входной сигнал, измеренный прибором, а через $y(t)$ - выходной сигнал или отклик, фиксируемый экспериментатором. Для простоты и определенности мы рассмотрим действительные одномерные сигналы, зависящие от времени, но эти допущения не существенно и аналогичные выводы будут справедливы, к примеру, при обработке изображений.

Как отмечалось, прибор моделируется линейной системой, для которой справедлив принцип суперпозиции (1):



(1)

$$L \left[\sum C_i x_i(t) \right] = \sum C_i y_i(t)$$

Введем $h(t, \tau)$ - отклик прибора на единичный импульс, по-данный на вход в момент времени τ . Функция $h(t, \tau)$ исчерпывающе характеризует поведение линейного прибора и, в зависимости от прелетной области, именуется по-разному: весовая функция, апериодная функция, функция рассеяния точки, функция Грина и т.д. По определению,

$$h(t, \tau) = L[\delta(t-\tau)], \quad \delta(t) - \text{Дельта-функция.}$$

Представим входной сигнал как сумму смещенных единичных импульсов $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$. Тогда, по принципу суперпозиции, на выходе прибора имеем:

$$L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) L[\delta(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad (2)$$

Полученное интегральное уравнение Фредгольма I-го рода с ядром

$h(t, \tau)$ представляем общее соотношение, связывающее входной сигнал, выходной сигнал и весовую функцию $h(t, \tau)$. Логично предположить, что величина отклика прибора зависит лишь от промежутка времени, прошедшего с момента подачи импульса (условие однородности), т.е. $h(t, \tau) = h(t-\tau)$. С учетом этого допущения, уравнение (2) сводится к основному уравнению линейного однородного прибора - уравнению типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau = h(t) * x(t) = y(t) \quad (2a)$$

2. Решение основного уравнения и характеристики прибора в частотной области.

Для решения (2a) обычно применяют методы операционного исчисления, с использованием преобразований Фурье (ПФ):

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad - \text{ прямое ПФ}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad - \text{ обратное ПФ}$$

Так как Фурье-образ свертки двух функций равен произведению их Фурье-образов, из (2a) следует:

$$H(f) \cdot X(f) = Y(f) \quad (3)$$

откуда получаем решение основного уравнения

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(f)}{H(f)} e^{-i2\pi ft} df, \quad \text{когда } H(f) \neq 0 \quad (4)$$

Определения

в). По весовой функции $h(t-\tau)$ - называется передаточной функцией прибора $H(f)$. Эту комплекснозначную функцию действительного аргумента $H(f) = |H(f)| e^{i\Phi(f)}$ трудно показать на рисунке. Поэтому отдельно наобозначают её модуль $|H(f)|$, называемый коэффициентом усиления, и аргумент (фазу) $\Phi(f)$. Можно показать, что коэффициент усиления - четная, а фаза - нечетная функция.

б). Частота среза f_c определяется соотношением

$$H(f) = 0, \text{ если } |f| > f_c$$

в). Симметричный интервал $(-f_c, f_c)$ - полоса пропускания прибора. Частотные составляющие входного сигнала, лежащие вне полосы пропускания, не участвуют, как следует из (3), в формировании отклика. Прибор действует как низкочастотный фильтр и этим, в основном, обусловлены его искажения.

Если весовая функция характеризует прибор во временной области, то в частотной области используют понятия, приведенные выше.

3. Эффекты ограничения полосы частот

Прибор идеален, когда $y(t) = x(t)$. По определении весовой функцией, это означает, что $h(t-\tau) = \delta(t-\tau)$. И, следовательно, передаточная функция $H(f) = 1$ на всех частотах. Но в реальной ситуации коэффициент усиления зависит от частоты и высокочастотная часть спектра $X(f)$ подавляется прибором. Чтоб исследовать основные эффекты ограничения по полосе частот, смоделируем прибор идеальным низкочастотным фильтром с $f_c = P$:

$$H_c(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{P}\right), \quad \text{rect}(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Весовая функция такого "реального" прибора

$$h_c(t-\tau) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau)]$$

(здесь $\text{sinc}(x) = x^{-1} \text{sin}(x)$) и далее, согласно (2а), это выход

$$y(t) = 2P \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2\pi P(t-\tau)] x(\tau) d\tau \quad (5)$$

Воспользуемся (5), чтоб исследовать как ограничение по полосе частот сказывается на разрешении двух импульсных сигналов

$$x_1(t) = \delta(t-\tau_1) \quad \text{и} \quad x_2(t) = \delta(t-\tau_2)$$

Очевидно,

$$y_1(t) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau_1)] \\ y_2(t) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau_2)]$$

т.е. на выходе каждой импульс "расплывается", амплитуда и ширина центрального максимума связаны обратной зависимостью и равны соответственно $2P$ и P^{-1} . Понятно, что при определенном P импульсы сольются и станут неразличимы. По Рэлею (см. [7]; стр. 306), импульсные сигналы разрешаются прибором, если отношение величин седловины между ними к амплитуде сигнала меньше $8\pi^{-2}$. Минимальное расстояние между различными сигналами называется расстоянием Рэлея R .

Найдем R при заданном P . Выберем удобную симметричную систему координат и расположим импульсы на расстоянии Рэлея друг от друга (рис.1).

По определению R , $y_2(0) / y_2(\frac{R}{2}) = \text{sinc}(\pi P R) = 8\pi^{-2}$ и, следовательно, $P R = \gamma - \text{const}$

Общий вывод состоит в том, что полоса частот и расстояние Рэлея связаны обратной зависимостью. Как показвали наши расчеты,

$\nu = 0.349766$ и поэтому, к примеру, для разрешения импульсов, следующих с интервалом в 1 миллисекунду, необходимо прибор с полосой $P > 349$ Гц; прибор с полосой частот 1 мГц разрешает импульсы, следующие не чаще 0.349×10^{-6} сек.

4. Сверхразрешение

По формуле (3) можно вычислить спектр входного сигнала $X(f)$ только внутри полосы пропускания. Но замечательным фактом следует признать возможность оценить этот же спектр и вне полосы пропускания. В случае удачной экстраполяции, мы как бы увеличиваем частоту среза прибора f_c и, тем самым, пропорционально улучшаем его разрешение. В этом состоит идея сверхразрешения. Теоретической основой сверхразрешения служит важный результат теории аналитических функций, известный как

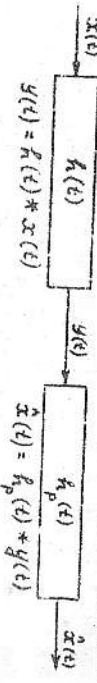
Теорема Винера-Пэли (частный случай):

Если сигнал $x(t)$ финитен, т.е. $x(t) = 0$ при $|t| > T$, и непрерывен при $|t| \leq T$, то спектр сигнала $X(f)$ является целой функцией.

Последнее, в частности, означает, что функция $X(f)$ полностью определяется любым своим интервалом и может быть восстановлена за его границами методами аналитического продолжения.

5. Борьба с шумами

К сожалению, решение задачи реставрации по формуле (4) на практике почти всегда оказывается бесполезным. Это объясняется обычной зашумленностью входного сигнала $y(t)$. Для диктаторского, представляли процессе реставрации, как преобразование в другой линейной системе, последовательно соединенной с исходной.



Здесь $\hat{x}(t)$ и $h_r(t)$ соответственно выходной сигнал и весовая функция системы реставрации. Поскольку $\hat{x}(t) = [h_r(t) * h_c(t)] * x(t)$ и при полном восстановлении $\hat{x}(t) = x(t)$, имеем $h_r(t) * h_c(t) = \delta(t)$ и $H_r(f) = 1 / H_c(f)$. Коэффициент усиления исходной системы $|H_c(f)|$ убывает с ростом частоты, поэтому система реставрации компенсирует это соответственным увеличением $|H_r(f)|$. Таким образом, если на выходной сигнал $y(t)$ накладывается высокочастотная помеха, она заметно усиливается при реставрации. Очевидный способ борьбы с таким явлением состоит в корректировке $H_r(f)$ на высоких частотах, коэффициент усиления здесь можно главным образом до нуля или просто зашумить, начиная с определенной частоты среза f_c .

Запишем

$$H_r(f) = \frac{1}{H_c(f)} \cdot W(f)$$

где $W(f)$ - корректирующий множитель. Разные методы, основанные на фильтрации высокочастотных помех, отличаются конкретным выбором $W(f)$ при единой схеме реставрации (6):

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_r(f) Y(f)] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{Y(f)}{H_c(f)} \cdot W(f) \right] \quad (6)$$

а) $W(f) = 1$ - инверсная фильтрация

Метод сверхчувствителен к шуму при высокой эффективности обработки сигнала. Применяется, когда отсутствует ограничение по полосе частот. В работе [8] рассмотрен положительный пример реставрации фотоизображения дугного кратера, смазанного из-за турбулентности земной атмосферы.